

Intégration numérique

I) Introduction

La formulation de nombreux problèmes est obtenue sous forme de dérivées. Les solutions font donc appel à des intégrales. Le problème est donc de calculer

$$S(y) = \int_a^b y(x) dx$$

Si on connaît une primitive

$$S(y) = Y(b) - Y(a)$$

Cependant, et en général, on ne connaît Y . On doit alors approcher $S(y)$ par des formules d'intégration

$$S^*(y) = \int_a^b P(x) dx \sim \int_a^b y(x) dx \text{ l'approximation polynomiale de } f$$

$$S^*(y) = \int_a^b y(x) dx \sim \sum A_i y(x_i) \text{ l'expression Gaussienne}$$

II) Intégration basée sur les approximations polynomiales

1) Généralités

Soit un intervalle $[a, b]$

Soit un jeu de données (x_i, y_i) , $i=0, \dots, n$

Tel que $\begin{cases} x_0 = a \\ x_n = b \end{cases}$

Soit $y(x)$ en fonction définie sur $[a, b]$ et $y^*(x)$ non interpolée de Lagrange

$$\begin{aligned} S(y) &= \int_a^b y(x) dx \text{ et} \\ S^*(y) &= \int_a^b y^*(x) dx \text{ où } y^*(x) = \sum y(x_i) Li(x) \end{aligned}$$

$Li(x) = li(x)$ est le multi-opérateur de Lagrange

$$S^*(y) = \int_a^b \sum_{i=0}^n y(x_i) Li(x) dx$$

$$S^*(y) = \sum_{i=0}^n y(x_i) \int_a^b Li(x) dx$$

Posons :

$$Bin = 1/b-a \int_a^b Li(x) dx$$

$$\text{Avec } L_i(x) = \prod_{j \neq i=0}^n (x-x_j)/(x_i-x_j)$$

$n \Rightarrow$ degrés du polynôme

Alors

$$S^*(y) = (b-a) \sum_{i=0}^n y(x_i) \text{ Bin}$$

2) Formules de Newton Cotes

Soit un intervalle $[a, b]$ et une subdivision régulière à n intervalles sur $[a, b]$
 $(x_0, x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_1 &= x_0 + h \\ x_2 &= x_1 + h \\ &= x_0 + 2h \quad h = b-a/n \\ x_i &= x_0 + ih \\ x_n &= x_0 + nh \end{aligned}$$

$$S^*(y) = (b-a) \sum_{i=0}^n y_i \text{ Bin}$$

n est plus fonction que de l'indice car l'espace est régulier

Supposons $n=1$ degrés du polynôme, $x_0 = a$, $x_1 = b$

$$B_0^{-1} = 1/(x_1-x_0) \int_{x_0}^{x_1} L_0(x) dx \quad \text{avec } L_0 = \prod_{j \neq 0}^1 ((x-x_j)/(x_0-x_j))$$

$$B_0^{-1} = 1/(x_1-x_0) \int_{x_0}^{x_1} (x-x_1)/(x_0-x_1) dx$$

$$= -1/(x_1-x_0)^2 \int_{x_0}^{x_1} (x-x_1) dx$$

$$= -1/(x_1-x_0)^2 [(x^2/2) - x_1x]_{x_0}^{x_1}$$

$$= -1/(x_1-x_0)^2 [(x_1-x_0)^2/2 - x_1(x_1-x_0)]$$

$$= -1/2 + x_1/(x_1-x_0)$$

$$B_1^{-1} = 1/(x_1-x_0) \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)/(x_1-x_0) dx$$

$$= 1/(x_1-x_0)^2 \int_{x_0}^{x_1} x-x_0 dx$$

$$= 1/(x_1-x_0)^2 [(x^2/2) - x_0x]_{x_0}^{x_1}$$

$$= 1/2 - x_0 / (x_1 - x_0)$$

$$S^*(y) = (b-a) \sum_{i=0}^{i=n} y_i B_i^n$$

$$S^*(y) = (x_1 - x_0) \sum_{i=0}^{i=n} y_i B_i^n$$

$$\begin{aligned} &= (x_1 - x_0) (y_0 B_0^1 + y_0 B_1^1) \\ &= (x_1 - x_0) [y_1(1/2 - x_0/(x_1 - x_0)) - y_0(1/2 - x_1/(x_1/x_0))] \end{aligned}$$

Or $S^*(y) = (x_1 - x_0)(y_0 + y_1)/2$

Supposons $n=2$

$$x_0 = a$$

$$x_1 = (a+b) / 2$$

$$x_2 = b$$

$$x_0 + x_1 / 2$$

$$B_0^2 = ?$$

$B_1^1 = ?$

$$B_2^2 = ?$$

$$\begin{aligned}
 B_0^2 &= 1/(x_2 - x_0) \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1/x_0 - x_1)(x - x_2/x_0 - x_2) \, dx \\
 &= -1/(x_2 - x_0)^2 \int_{x_0}^{x_2} (x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)/(x_0 - x_1) \, dx \\
 &= -1/((x_1 - x_0)^2(x_0 - x_1)) \int_{x_0}^{x_2} x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 \, dx \\
 &= -1/((x_1 - x_0)^2(x_0 - x_1)) [x^3/3 - (x_1 + x_2)x^2/2 + x_1x_2]_{x_0}^{x_2} \\
 &= -1/((x_1 - x_0)^2(x_0 - x_1)) [(x_2 - x_0)^3/3 - (x_1 + x_2)(x_2 - x_0)^2/2 + x_1x_2] \\
 &= -1/(x_2 - x_0)^2(x_0 - x_1) [(x_2 - x_0)^3/3 - (x_1 + x_2)(x_2 - x_0)^2/2 + x_1x_2] \\
 &= -(x_2 - x_0)/(3(x_0 - x_1)) + (x_1 + x_2)/(2(x_0 - x_1)) - x_1x_2/((x_2 - x_0)^2(x_0 - x_1))
 \end{aligned}$$

Après calcul

$$B_0^2 = 1/6 = B_2^2$$

$$B_1^2 = 4/6$$

$$S^*(y) = (b-a)/6 (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\text{Or } b-a = 2h \Rightarrow h = b-a/2$$

$$S^*(y) = h/3 (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\begin{aligned} S^*(y) &= - (x_1 - x_0) / (3(x_0 - (x_0 + x_1)/2)) + ((x_1 + x_2)/2 + x_2) / 2 (x_0 - (x_0 + x_2)/2) - ((x_1 + x_2)/2 + x_2) / \\ &\quad ((x_2 - x_0)^2 (x_0 - (x_0 + x_2)/2)) \\ &= -2(x_2 - x_0) / (3(x_0 + x_2)) + (x_0 + 3x_2) / (2(x_0 + x_2)) - 2(x_0 + x_2)x_2 / (x_2 - x_0)^2 (x_0 + x_2) \\ &= -2(x_2 - x_0) / (3(x_0 + x_2)) + (x_0 + 3x_2) / (2(x_0 + x_2)) - 2x_2 / (x_1 - x_0)^2 \\ &= - (4(x_2 - x_0) + 3x_0 + 9x_1) / (6(x_0 + x_2)) - 2x_2 / (x_2 - x_0)^2 \end{aligned}$$

Généralisation

Montrons que l'intervalle est régulièrement espacé, c'est-à-dire

$$x_i = a + ih$$

$$h = (b-a) / n = \text{cste}$$

alors les B_i^n sont indépendants de $[a, b]$

$$B_i^n = 1/(b-a) \int_a^b \prod_{j=0}^n (x-x_j)(x_i-x_j) dx$$

$$\text{or } x = a + sh \quad \text{ou } s \in [0, n]^a$$

$$dx = hds$$

$$x = a \quad \text{si } s = 0$$

$$x = b \quad \text{si } s = n$$

donc

$$x - x_j = (a + sh) - (a + jh) = (s - j)h$$

$$x_i - x_j = (a + ih) - (a + jh) = (i - j)h$$

d'où

$$B_i^n = 1/(n.h) \int_0^n \prod_{j=0}^n ((s-j)h) / ((i-j)h) h ds$$

$$B_i^n = 1/n \int_0^n \prod_{j \neq i} (1-j)/(i-j) ds \quad \text{indépendants de } a \text{ et } b$$

Les formules de degrés > 8 sont rarement utilisées

- la précision n'est pas toujours améliorée
- des formules + précises et + simples existent

3) Formules composites

Règle des trapèzes

On applique la formule de Newton Cotes pour $n=1$ à des intervalles successifs

$$S^*(y) = h/2 (y_0 + y_1) + h/2 (y_1 + y_2) + \dots + h/2 (y_{n-1} + y_n)$$

$$S^*(y) = h[(y_0 + y_n)/2 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i]$$

Règle de Simpson

Idem $n=2$

$$S^*(y) = h/3 (y_0 + 4y_1 + y_2) + h/3 (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + h/3 (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Le nombre d'intégrale doit être pair